Yousra Gati

Title: Problèmes provenant de la règle de Descartes

Abstract: Les polynômes sont largement utilisés en mathématiques appliquées et fournissent un cadre analytique pour la modélisation dans divers domaines tels que la mécanique, la physique, l'économie et la finance. Dans ce travail, nous essayons de mieux comprendre les polynômes et leurs racines. Plus précisément, nous nous intéressons aux polynômes réels à une variable de degré d avec des coefficients non nuls vérifiant une suite de signes donnée. La règle de Descartes, complétée par l'observation de Fourier, affirme que le nombre des racines strictement positives pos (resp. négatives neg) ne peut dépasser le nombre de changements c (resp. le nombre de préservations p) dans la suite de signes, et que $pos = c - 2k$, $k \in \mathbb{N}$ et $neg = p - 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Une paire (pos, neg) vérifiant ces conditions est appelée *paire admissible*. La question qui se pose alors est : pour un degré d et une suite de signes donnée (SS), une paire admissible est-elle toujours réalisable ? Autrement dit, peut-on toujours trouver un polynôme qui la réalise ?

La réponse à cette question a été donnée par Grabiner (1999) en degré 4. En effet, il a démontré que pour la $SS + + - ++$, on ne peut pas trouver un polynôme ayant deux racines strictement positives et aucune racine négative avec des coefficients respectant cette SS. Quelques résultats ont été obtenus en degrés supérieurs. Notre travail s'inscrit dans la suite de cette problématique. Nous présenterons des théorèmes de réalisabilité et de non-réalisabilité répondant à cette question dans certains cas, ainsi que quelques questions ouvertes.